

力学 — ちゃんと勉強してますか

岩熊哲夫 (2021 年 6 月 25 日)

秋田大学の後藤文彦先生のブログ等に触発されて書いている備忘録のようなもの。

1 内力って何だ

図-1 のように左端を固定された棒の右端を P で引っ張る。さて左端の反力 Q はいくつになるか。これを解くには棒の巨視的な力のつり合いをとればいから

$$P - Q = 0 \Rightarrow Q = P \quad (1)$$

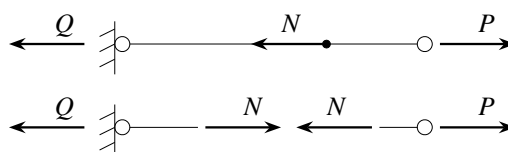


図-1 外力と内力

のように求められる。単に作用反作用の定理の結果である。では、この棒はどのくらいの大きさの力で抵抗しているかと質問すると、数名の学生が「両方から P で引っ張られているから $2P$ で抵抗している」と答える。本当か。抵抗力は、連続体力学（材料力学・構造力学）では内力と分類される。内部の力なので、図-1 の上の図のように棒の途中で生じているのが軸力だという図が描かれている教科書等がある。さあ、この軸力 N は引張か圧縮か。左端から観たら圧縮のように感じるが、右端からこの矢印を観たら引張のようだ。そもそもどこに生じている抵抗力なのか。こういう図だと何も本質的なことが見えてこないのだ。

大事なものは、内力を可視化するには物体内部に仮想的な表面（断面）を設定して、その面に生じた力を矢印で表す必要があるということだ。これを実行したのが図-1 の下の図である。棒を途中で切断して（この例の場合は内力は一樣なので、どの位置で切断しても同じ）、その切断面に引張正（応力の正の向き）の方向に矢印を描いて軸力としなければならない。すると、切断面より左の区間あるいは右の区間でつり合いをとれば、軸力は $N = P$ になっていることがわかる。つまり、この棒は $2P$ ではなく P で抵抗しているのだ。これがわからない人は勉強不足だよ。

2 内力の可視化

勉強不足の学生が内力の扱い方を間違える面白い例を一つ示しておこう。図-2 の一番左に示した図のように、長さ l の梁と柱でできたラーメンで、梁にヒンジがある系である。これは実は静定系なのでつり合い式だけで

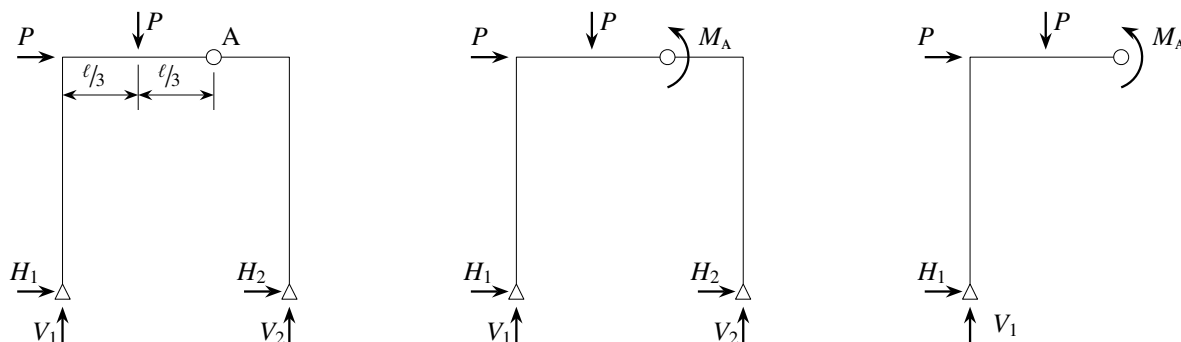


図-2 静定ラーメン

支点反力を求められるはずだ。ところが反力は図示したように四つあるが、力のつり合い式は上下方向と左右方向の二つ、モーメントのつり合い式が一つの、合計三つで

$$V_1 + V_2 - P = 0, \quad H_1 + H_2 + P = 0, \quad \ell P + \frac{\ell}{3}P - \ell V_2 = 0 \quad (2a, b, c)$$

しか無い。おやっ、これは解けないぞ。と思ったら、梁にヒンジが挿入してあった。ヒンジ部はモーメントに抵抗できないから、その断面には曲げモーメントは発生しないという条件がもう一つ設定できる。勉強不足の学生でもそのくらいはわかったとしよう。

ところが、その曲げモーメント M_A を図-2の中央の図のように、断面を切断せずに点Aの付近にいい加減な矢印で書いてしまう学生がいるらしいのだ。そうした上で点A回りのモーメントのつり合いを考えようとするのだが、そのときこの図のような構造全体のモーメントのつり合い式を求めてから、その M_A をゼロにする条件を求めようとするのである。つまり

$$M_A = \frac{2}{3}\ell V_1 - \frac{\ell}{3}P - \ell H_1 - \ell H_2 - \frac{\ell}{3}V_2 = 0 \quad (3)$$

のように、その条件式を求めるのだ。

ようやく四つの未知の支点反力に対して、式(2)(3)の四つの条件式が得られたから、それを4行の連立方程式にしたときの係数行列を求めると、もちろんそれは特異になって解は得られない。当たり前である。なぜならヒンジ部の条件式(3)は巨視的なモーメントのつり合いを点A回りでとっただけだからだ。あるいは式(2a)(2c)から V_1, V_2 を求めて式(3)に代入すると、それは $H_1 + H_2 + P = 0$ のように式(2b)と一致するのだ。これでは答は求められない。

ヒンジ部の曲げモーメント M_A は内力だから、図-2の一番右に示した図のように断面Aで切断した上で、正の向きに可視化しないとイケないのである。この切断面より左の区間でモーメントのつり合いをとって M_A をゼロにすると

$$M_A = \frac{2}{3}\ell V_1 - \frac{\ell}{3}P - \ell H_1 = 0 \quad (4)$$

になる。これと式(2)を連立させると、最終的に

$$V_1 = -\frac{1}{3}P, \quad H_1 = -\frac{5}{9}P, \quad V_2 = \frac{4}{3}P, \quad H_2 = -\frac{4}{9}P \quad (5a, b, c, d)$$

のように求めることができる。図-3には曲げモーメント図を示した。

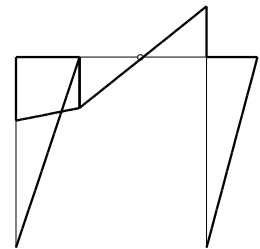


図-3 曲げモーメント図

3 トラスは軸力だけで抵抗する

図-4のような静定トラスの支点反力を求めよう。何も考えずに水平・鉛直方向の反力を想定して図のような記号で表すと、力のつり合い式とモーメントのつり合い式が

$$V_1 + V_2 = P, \quad H_1 + H_2 = 0, \quad \frac{\ell\sqrt{3}}{2}H_1 + \frac{\ell}{2}P = 0 \quad (6a, b, c)$$

となるから、明らかに条件式が一つ足りない。解けない。なぜ。それは勉強不足だから。トラスの1部材は軸力だけでしか抵抗できないことを忘れていた。曲げやせん断では抵抗しないのだ。ということは、例えば図-4の斜めの部材の支点反力は、その部材の斜め方向にしか生じないということの意味する。それを理解していない人が反力を想定したから答が出ないわけだ。

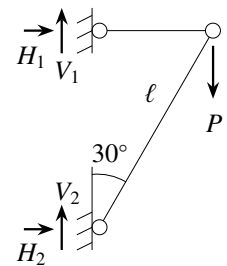


図-4 静定トラス

そこで今度は下の支点反力を部材方向に変更して Q_2 としてみよう。ただし、考え方が正しいかどうかを確かめるために、上の支点反力の鉛直方向は敢えて残しておく。するとつり合い式が

$$V_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}Q_2 = P, \quad H_1 + \frac{1}{2}Q_2 = 0, \quad \frac{\ell\sqrt{3}}{2}H_1 + \frac{\ell}{2}P = 0 \quad (7a, b, c)$$

となるから、右から順に解いて

$$H_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}P, \quad Q_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}P, \quad V_1 = 0 \quad (8a, b, c)$$

を得る。見事に V_1 はゼロになっている。つまり上の水平部材の支点反力もその部材方向にしか生じないことがわかる。

軸力も求めよう。軸力は棒の途中の断面の部材方向にしか生じておらず、軸方向には一様なので、図-6 のようにある断面で切断しよう。すると、この切断面よりも右の区間でつり合いをとると

$$N_1 + \frac{1}{2}N_2 = 0, \quad P + \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 = 0 \quad (9a, b)$$

だから、軸力は

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}P, \quad N_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}P \quad (10a, b)$$

のように求められる。水平部材は引張状態、斜めの部材は圧縮状態だ。あとは切断面よりも左の区間で反力と内力のつり合いを解けば

$$Q_1 = -N_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}P, \quad Q_2 = -N_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}P \quad (11a, b)$$

のように、上で得た答と同じ反力の結果を得る。

内力を可視化するときには、外力の状況から容易に引張か圧縮が予想できる場合であっても必ず応力正の方向に矢印を書くのが無難だ。そして、正の断面と負の断面で軸力やせん断力・曲げモーメント等の内力の正の向きが逆になることには注意しないといけない。ただし反力および外力は自分で好きなように定義していい。その定義した方向が正なわけだ。通常、外力は座標の正方向、外力モーメントは右ねじ正の方向を正とするが、この例のように特に座標軸を定義していない場合は自由だ。

4 分布外力と等価な集中外力の落とし穴

例えば図-7 のように

$$q(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{3\ell} \quad (12)$$

のような分布外力が載った単純梁の両端の支点反力は、まず力のつり合いから

$$R_a + R_b = \int_0^\ell q(x) dx = q_0 \int_0^\ell \sin \frac{\pi x}{3\ell} dx = \frac{3\ell}{2\pi} q_0 \quad (13)$$

という関係が成立し、左支点回りのモーメントのつり合いから

$$\ell R_b = \int_0^\ell xq(x) dx = q_0 \int_0^\ell x \sin \frac{\pi x}{3\ell} dx = \frac{9\sqrt{3} - 3\pi}{2\pi^2} q_0 \ell^2 \quad (14)$$

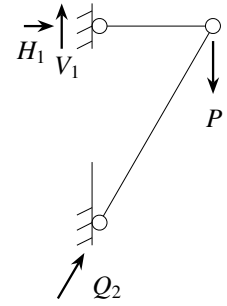


図-5 部材方向の反力

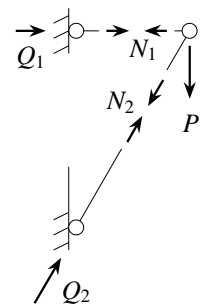


図-6 内力と外力

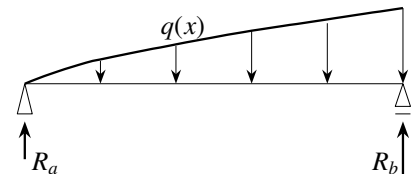


図-7 任意の分布外力

が成立する。この2式から結局

$$R_a = \frac{3(2\pi - 3\sqrt{3})}{2\pi^2} q_0 \ell, \quad R_b = \frac{9\sqrt{3} - 3\pi}{2\pi^2} q_0 \ell \quad (15)$$

を得る。このように、きちんと積分計算をしないといけないことをまず学んでおくべきである。

ところで式(13)の右辺はこの分布荷重を図示したときの分布図形の面積に等しい。そして式(14)の右辺は、その図形の左端回りの1次モーメントだ。したがって、この二つの比は、この図形の重心までの左端からの距離になっていることがわかる。つまり

$$F_q \equiv \int_0^\ell q(x) dx \quad (16)$$

と置くと、この図形の左端からの重心までの距離 x_G は

$$x_G \equiv \frac{1}{F_q} \int_0^\ell xq(x) dx \quad (17)$$

で求められることになる。つまりこれは、図-8のように巨視的な検討をする場合には、この分布外力を右図のような等価な集中外力に置き換えられることを意味する。この定義を使えば、この梁全体の力のつり合い式と左端回りのモーメントのつり合い式は

$$R_a + R_b = F_q, \quad \ell R_b = x_G F_q \quad (18a, b)$$

と書くこともできる。

しかし、この理解が不十分な学生が次のような間違いをすることがある。例えば図-9のように

$$q(x) = q_0 \frac{x}{\ell} \quad (19)$$

の場合は、その右の図に示したように $F_q = q_0 \ell / 2$, $x_G = 2\ell / 3$ となる。どちらの図を使っても支点反力は同じく

$$R_a = \frac{q_0 \ell}{6}, \quad R_b = \frac{q_0 \ell}{3} \quad (20a, b)$$

と求められる。ここまではいい。次に左から x の断面のせん断力と曲げモーメントを求めよう。

図の左下から明らかなように幅 x の三角形分布の面積は $F_q = 1/2 x q_0 x / \ell$ で、断面から三角形分布の重心までの距離は $x/3$ だから

$$V = R_a - F_q = R_a - \frac{q_0 x^2}{2\ell}, \quad M = xR_a - \frac{x}{3} F_q = xR_a - \frac{q_0 x^3}{6\ell} \quad (21a, b)$$

と求められ、せん断力は2次曲線に、曲げモーメントは3次曲線になる。ところが、勉強不足の学生は分布外力は等価な集中外力に置き換えられるとだけ覚えていて、その置き換えた状態の右下の図から

$$V = R_a, \quad M = xR_a \quad (22a, b)$$

が答だと思ってしまうのだ。「等価」がどういう意味かを理解していないのが原因だ。構造物全体を対象にしたときの等価性と、ある断面までの区間を対象にしたときの等価性とは違うのである。

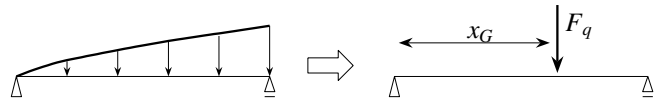


図-8 分布外力と巨視的に等価な集中外力

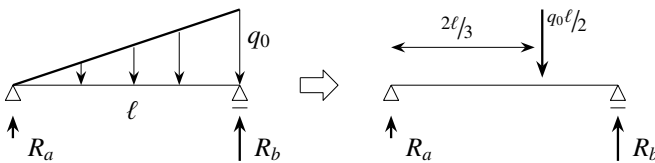


図-9 三角形分布外力に対する内力

5 Castigliano の第二定理は冗長過ぎる

Castigliano の第二定理が補ポテンシャルエネルギーの停留原理だと解釈できるような定式化を別の文書でしたが、いまいちしっくりしない。が、ここはそういうのではなく、この定理がさほど有用ではないのに相変わらず講義されているらしく、修士の他大学からの受験者がとても冗長な計算をして、結局計算間違いをしたり、時間を浪費している場合が散見されているのが現状だ。ここにその実例を示しておこう。

同じ長さ ℓ の 3 本の部材でできた図-10 の構造で、 $Q = 0$ のときの
 載荷点の Q 方向の変位 δ を求めよう。曲げモーメント分布はそれぞれ

$$A: M = -xP, \quad B: M = xQ - \ell P, \quad C: M = -(x + \ell)P + \ell Q \quad (23a, b, c)$$

なので、補ひずみエネルギー U^* は

$$U^* = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^\ell x^2 P^2 dx + \int_0^\ell (xQ - \ell P)^2 dx + \int_0^\ell (-xP - \ell P + \ell Q)^2 dx \right] \quad (24)$$

と表される。ここで微分演算と極限をとれば

$$\begin{aligned} \delta &= \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\partial U^*}{\partial Q} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{1}{2EI} \left[\int_0^\ell 2x(xQ - \ell P) dx + \int_0^\ell 2\ell(-xP - \ell P + \ell Q) dx \right] \\ &= \frac{1}{2EI} \left[\int_0^\ell -2x\ell P dx + \int_0^\ell 2\ell(-xP - \ell P) dx \right] \\ &= \frac{1}{2EI} \left[-\ell x^2 P - \ell x^2 P - 2\ell^2 x P \right]_0^\ell = \frac{1}{2EI} (-4\ell^3 P) = -\frac{2P\ell^3}{EI} \end{aligned} \quad (25)$$

のように 5 行程度で計算できる。ところが他大学からの修士受験生の中には、 U^* をまず計算してから微分演算と極限をとる人が少なくない。こうすると U^* を

$$U^* = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3}\ell^3 P^2 + \frac{1}{3}\ell^3 Q^2 - \ell^3 PQ + \ell^3 P^2 + \frac{1}{3}\ell^3 P^2 + \ell^3 P^2 - \ell^3 PQ - 2\ell^3 PQ + \ell^3 P^2 + \ell^3 Q^2 \right] \quad (26)$$

のように求めるだけで数行の長い演算が必要で、時間もかかるし計算間違いの落とし穴も散在してしまう。

では、単位荷重法を使おう。この場合は $Q = 1$ だけの載荷による曲げモーメント M_u が必要になり

$$A: M = -xP, \quad M_u = 0, \quad B: M = -\ell P, \quad M_u = x, \quad C: M = -xP - \ell P, \quad M_u = \ell \quad (27a, b, c)$$

と求められるので、区間 A の計算は不要になり、変位は

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^\ell -\ell x P dx + \int_0^\ell (-\ell x P - \ell^2 P) dx \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{\ell}{2} x^2 P - \frac{\ell}{2} x^2 P - \ell^2 P x \right]_0^\ell = \frac{1}{EI} (-2\ell^3 P) = -\frac{2P\ell^3}{EI} \end{aligned} \quad (28)$$

のように 4 行程度つまり上式 (25) の下 2 行のみの計算で済んでいる。実は計算が簡単なだけじゃなく、単位荷重法は二つの問題の内積（一種の仮想仕事の式）をとっている点で、理論や応用等も含めてとても汎用的なのだ。構造力学を初めて勉強した学部学生は、その意味もわからずに断面係数の計算をすること等も含めて、積分の演習科目なのではないかと思った人が多かったのではないだろうか。

6 熱ひずみは非弾性ひずみ

熱ひずみは応力を発生させるだろうか。確かに、両端固定の棒を熱すると内部には圧縮の軸力が発生している。これはちょうど Hooke の法則のように、熱ひずみに比例した応力が発生しているのだろうか。応力ってそ

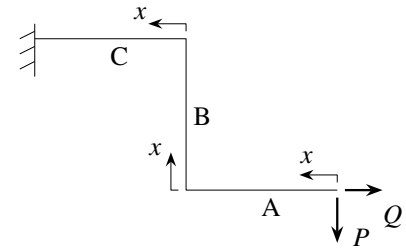


図-10 Castigliano の定理と単位荷重

もそも何だろう。我々はこのあたりを、特に構造力学の講義ではきちんと教えていないかもしれない。だから学生も勉強不足のために、場合場合によって難しく考えて間違ったりしているように見える。

実は熱ひずみは非弾性ひずみであって、応力を発生させる弾性ひずみとはまるで違うのだ。理屈だけを1次元で書いておこう。物体内にあるひずみ ϵ が生じたとき、対象は連続体なので孔が空いたり物体が重なったりしない。だから変位とは $\epsilon = \frac{du}{dx}$ のような関係が成立する。これに対し、熱ひずみや塑性ひずみは非弾性ひずみ ϵ^i と呼ばれ、例えば後者は連続体の中に孔やすべりを発生させるような変形に相当している。そのとき同時に弾性ひずみ ϵ^e が生じることによって、孔やすべりによる幾何学的（運動学的）な非適合性を埋め合わせようとすると考えるのだ。つまり

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^i = \frac{du}{dx} \quad (29)$$

という関係になる。そして Hooke の法則は、この弾性成分のみに対して定義される抵抗則で

$$\sigma = E\epsilon^e = E(\epsilon - \epsilon^i) \quad (30)$$

のような抵抗力が発生するというものなのだ。 ϵ を総ひずみと呼び、これは式(29)のような変位との関係を持っている適合ひずみである。ひずみを変位の微係数で表した式をひずみの定義と呼ぶが、場合によっては適合条件とも呼ぶことがあるが、それはそのひずみが適合性を持つからで、そのひずみに対応した変位が唯一に決定できる（離れたり重なったりしない、二値ではない）からだ。当然、物理モデルとしての定義から非弾性ひずみ ϵ^i は非適合だが、実は弾性ひずみ ϵ^e も非適合ひずみであることは覚えておいて欲しい。

まず図-11のように、外力 P が作用する棒全体の温度が ΔT だけ上昇したときの先端の変位 u を求めよう。まず軸の総ひずみは

$$\epsilon = \frac{u}{\ell} \quad (31)$$

であることには誰も異論は無いだろう。そして熱ひずみは、熱膨張率を α とすると

$$\epsilon^i = \alpha\Delta T \quad (32)$$

と算定できる。図-11の下の方のように、軸力は外力とのつり合いから

$$N = P \quad (33)$$

である。これを使って、さらに式(30)に式(31)(32)の二つのひずみ成分を代入すれば

$$\frac{P}{A} = \frac{N}{A} = \sigma = E\left(\frac{u}{\ell} - \alpha\Delta T\right) \quad (34)$$

となるので、結局右端の変位は

$$u = \frac{P\ell}{EA} + \alpha\ell\Delta T \quad (35)$$

のように求められる。第1項が外力 P による伸び変位で、第2項が熱膨張による変位だ。もし $P = 0$ なら第2項の熱膨張だけの伸びが発生するだけだ。もし $u = 0$ になるように右端も拘束されていれば、 $\Delta T > 0$ のとき

$$N = -EA\alpha\Delta T < 0 \quad (36)$$

のように圧縮軸力が生じていることがわかる。棒は一切伸び縮みしていないのに、内部に軸力が生じていることから、熱ひずみと抵抗力の関係がいわゆる Hooke の法則ではないことがわかるはずだ。

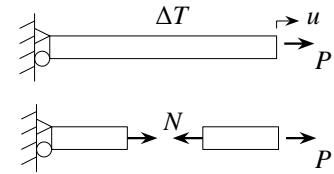


図-11 熱ひずみ

さらに図-12のような不静定構造の場合を解いてみると、熱ひずみの挙動がよく理解できるかもしれない。材料や寸法の異なる2本の棒をつないで、接合点に集中外力 P を与えると同時に

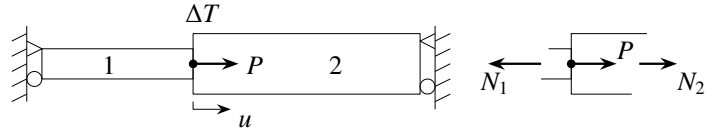


図-12 不静定構造の熱ひずみ

全体に ΔT の温度変化を与える。接合点の右向きの変位を u とすると、左の部材では

$$\epsilon_1 = \frac{u}{\ell_1}, \quad \epsilon_1^i = \alpha_1 \Delta T, \quad \sigma_1 = E_1 (\epsilon_1 - \epsilon_1^i) = E_1 \left(\frac{u}{\ell_1} - \alpha_1 \Delta T \right) \quad (37a, b, c)$$

右の部材では

$$\epsilon_2 = -\frac{u}{\ell_2}, \quad \epsilon_2^i = \alpha_2 \Delta T, \quad \sigma_2 = E_2 (\epsilon_2 - \epsilon_2^i) = E_2 \left(-\frac{u}{\ell_2} - \alpha_2 \Delta T \right) \quad (38a, b, c)$$

となる。一方、図-12の右の図から、接合点における力のつり合いは

$$P + N_2 - N_1 = 0 \quad (39)$$

つまり

$$P = A_1 \sigma_1 - A_2 \sigma_2 \quad (40)$$

なので、これに上の式(37c)(38c)を代入して整理すると

$$u = \left(\frac{E_1 A_1}{\ell_1} + \frac{E_2 A_2}{\ell_2} \right)^{-1} \{ P + (\alpha_1 E_1 A_1 - \alpha_2 E_2 A_2) \Delta T \} \quad (41)$$

を得る。特別な場合として、 $P = 0$ で $E_1 = E_2$, $A_1 = A_2$, $\ell_1 = \ell_2$ の場合は

$$u = \frac{1}{2} \ell (\alpha_1 - \alpha_2) \Delta T \quad (42)$$

となるので、 $\Delta T > 0$ の場合には $\alpha_1 > \alpha_2$ のときには $u > 0$ になって、接合点が右に変位することがわかり、確かにその通りだろう。また式(41)を式(37c)(38c)に代入し戻せば、それぞれの棒の応力が、 $P = 0$, $\Delta T > 0$ の場合には

$$\sigma_1 = - \left(\frac{E_1 A_1}{\ell_1} + \frac{E_2 A_2}{\ell_2} \right)^{-1} E_1 E_2 A_2 \left(\frac{\alpha_1}{\ell_2} + \frac{\alpha_2}{\ell_1} \right) \Delta T = - \left(\frac{\ell_1}{E_1} + \frac{\ell_2 A_1}{E_2 A_2} \right)^{-1} (\alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2) \Delta T < 0, \quad (43a)$$

$$\sigma_2 = - \left(\frac{E_1 A_1}{\ell_1} + \frac{E_2 A_2}{\ell_2} \right)^{-1} E_1 E_2 A_1 \left(\frac{\alpha_1}{\ell_2} + \frac{\alpha_2}{\ell_1} \right) \Delta T = - \left(\frac{\ell_2}{E_2} + \frac{\ell_1 A_2}{E_1 A_1} \right)^{-1} (\alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2) \Delta T < 0 \quad (43b)$$

のように計算でき、どちらも圧縮であることがわかる。また $\Delta T = 0$, $P > 0$ の場合は

$$u = \left(\frac{E_1 A_1}{\ell_1} + \frac{E_2 A_2}{\ell_2} \right)^{-1} P, \quad \sigma_1 = E_1 \left(\frac{E_1 A_1}{\ell_1} + \frac{E_2 A_2}{\ell_2} \right)^{-1} \frac{P}{\ell_1} > 0, \quad \sigma_2 = -E_2 \left(\frac{E_1 A_1}{\ell_1} + \frac{E_2 A_2}{\ell_2} \right)^{-1} \frac{P}{\ell_2} < 0 \quad (44a, b, c)$$

を得る。2本の棒の寸法と材料が同じなら $\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{P}{2A}$, $N_1 = -N_2 = \frac{P}{2}$ のように、外力の半分ずつに抵抗している。これも当たり前の結果だ。